# TD n°15 : étude d'une fonction dépendant d'un paramètre

Pour tout réel $\lambda$, on définit la fonction $f_\lambda$ par : $f_\lambda(x) = x\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{\lambda x+1}\right|}$.

On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de $f_\lambda$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de $f_\lambda$.
2. Sur $\mathcal{D}_\lambda$, $f_\lambda$ est-elle continue, dérivable ?
3. Etudier l'allure de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ quand $\lambda$ tend vers l'infini. Le cas échéant, on précisera l'équation de l'asymptote, et le placement de $\mathcal{C}_\lambda$ par rapport à celle-ci.
4. Etudier le sens de variation de $f_\lambda$ et dresser son tableau de variation.

   On sera amené à distinguer les cas suivants :
   $$\lambda < -9, \quad \lambda = -9, \quad \lambda \in ]-9,-1[, \quad \lambda = -1, \quad \lambda \in ]-1,0[, \quad \lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0$$
5. Montrer que l'ensemble $\Gamma$ des points à tangente horizontale des courbes $\mathcal{C}_\lambda$ est une partie (à déterminer exactement) de la courbe $\mathcal{C}$ de l'application $x \mapsto \varphi(x) = x\sqrt{|2x-1|}$.
6. Montrer qu'une transformation géométrique simple permet de déduire $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_0$.
7. Préciser la concavité de $\mathcal{C}_0$.
8. Etudier les positions respectives des courbes $\mathcal{C}_\lambda$.
9. Représenter sur un même graphique les courbes $\mathcal{C}_{-20}$, $\mathcal{C}_{-9}$, $\mathcal{C}_{-2}$, $\mathcal{C}_{-1/2}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_5$

   NB : utiliser un repère orthogonal (unité 5cm sur $Ox$ et 2cm sur $Oy$).